Lec 35 函数极限习题课

35.1 几个基本概念

1. 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

   例 35.1 $x \to 0$ 时,$\sin x, x^m(m>0), \tan x, e^x-1, 1-\cos x$ 都是无穷小量;

   $n \in N^*, n \to$ 时, $n^n, n!, a^n(a>1), n^A(A>0), \ln n$ 都是无穷大量.

   注 请区分, $lim_{x\to 0}x=0$ 是函数极限, 而 $x \to 0$ 时 x 是无穷小量. 前者是相等关系, 后者是趋于 0. 期中考试有很多同学在分母写出了 $\lim\limits_{x\to 0} x$ 的形式, 这是错误的.
2. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.
3. 幂 (x^α, α 为常量), 指数 ($a^x, a>0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a>0, a\neq 1$), 指数函数 (e^x), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续. 一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

注 我们常说的常数是一个相对的概念, 需要结合语境去理解. 比如 $a_n=Mn$, M 是一个常数, 因为他与我们在此处关注的 n 是无关的, 但是 a_n 就不是常数. 在幂函数中, 指数 α 是一个常数, 但是 x 是一个变量, 所以 x^α 是一个关于 x 的函数. 之后讲求导法则的时候, 需要搞清楚谁是与 x 有关的变量, 谁是常数.

35.2 无穷大的大小

命题 35.1 (常用数列无穷大)

设 a, A, m 为常数, 且 $a>1, \alpha>0, m>0$, 证明: $n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha >> (\ln n)^m$, 在 $n\to\infty, n\in N^*$ 时成立; 其中 $n^n >> n! \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$, 称为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.

证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 故 $n^n>>n!$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{[a]+1}\cdots\dfrac{a}{n}<\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{[a]+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}$, 其中 $\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{[a]+1}$ 是与 n 无关的常数, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$, 故 $n!>>a^n$.
3. 先设 $\alpha\in N^*, a=1+\lambda$, 则 $\lambda>0, a^n=(1+\lambda)^n>C_n^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}$. 故 $0>\dfrac{n^\alpha}{a^n}<\dfrac{n^\alpha}{C_n^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}}\to 0, n\to\infty$.

4. 仅证 $m=1$ 时, 令 $n^\alpha=y$, 则 $n\to\infty$ 时, $y\to+\infty$, 且 $\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln y}{y}$. 设 $k\leqslant y\leqslant k+1$, 则 $\dfrac{k}{k+1}<\dfrac{\ln y}{y}<\dfrac{\ln(k+1)}{k}$, 故 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=0$.

命题 35.2 (常用函数无穷大)

设 a,A,m 为常数, 且 $a>1,\alpha>0,m>0$, 证明: $x^x>>a^x>>x^\alpha>>(\ln x)^m$, 在 $x\to+\infty,x>0,x\in R$ 时成立.

证明

1. 设 $n\leqslant x<n+1$, 则 $\begin{cases}n^n\leqslant n^x<(n+1)^n,\\ a^n\leqslant a^x<a^{n+1},\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a^n}{(n+1)^{n+1}}<\dfrac{a^x}{x^x}<\dfrac{a^{n+1}}{n^n}$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(n+1)^{n+1}}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^x}{x^x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{a^x}=+\infty$, 故 $x^x>>a^x$.
2. 设 $n\leqslant x<n+1$, 则 $\dfrac{n^\alpha}{a^{n+1}}<\dfrac{x^\alpha}{a^x}<\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^n}$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^{n+1}}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{a^x}=+\infty$, 故 $x^\alpha>>a^x$.
3. 设 $n\leqslant x<n+1$, 则 $\dfrac{\ln n}{(n+1)^\alpha}<\dfrac{\ln x}{x^\alpha}<\dfrac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{(n+1)^\alpha}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{a^x}=+\infty$, 故 $x^\alpha>>a^x$.

例 35.2 证明:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$;
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,a>0,a\neq1$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\alpha\neq0$.
7. $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
8. $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6})^{4x}=\mathrm{e}^{12}$.

注 上述例 $1\sim6$ 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当 $x\to0$ 时,

1. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\sim\dfrac{1}{2}$;
2. $\arcsin x\sim x$;
3. $\ln(1+x)\sim x$;
4. $\mathrm{e}^x-1\sim x$;
5. $a^x-1\sim\ln a\cdot x$;
6. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x$.

证明

1. $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin\arcsin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\arcsin x} = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln\mathrm{e} = 1$.
4. 令 $\mathrm{e}^x-1=u$, 则 $x\to 0$ 时, $u\to 0$, 且 $x=\ln(1+u)$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} =$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = 1$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a$, 令 $u=x\ln a$, 则 $x\to 0$ 时,$u\to 0$, 且 $x=\frac{u}{\ln a}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a\cdot\lim\limits_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u} = \ln a$.
6. 令 $u=\alpha\ln(1+x)$, 则 $x\to 0$ 时,$u\to 0$, 且 $x=\frac{u}{\alpha}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} =$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = 1\cdot\alpha = \alpha$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\ln\cos x}{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\ln\cos x}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x}\right) =$ $\exp\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
8. $\frac{x^2+3x-5}{x^2+6} = 1+\frac{3x-11}{x^2+6} \to 1+0 = 1$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2+3x-5}{x^2+6})^{4x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{3x-11}{x^2+6})^{\frac{x^2+6}{3x-11}\cdot\frac{3x-11}{x^2+6}\cdot 4x} =$ $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{3x-11}{x^2+6}\cdot 4x} = \mathrm{e}^{12}$.

注 其中 7, 8 为底数与指数皆为变量, 且底数的极限值为 1, 指数的极限值为 $+\infty$, 这种形式的极限求解时, 可以尝试取对数, 然后利用对数函数的连续性, 将指数提取出来, 再求极限. 我们称这种形式的极限为 1^∞ 型不定式.

不定式是相对于 $\alpha(x)^{\beta(x)}$,$\alpha(x)$, $\beta(x)$ 都有非 0 常数极限而言的, 后者很好求极限. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = \beta$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)} = \alpha^\beta$. 当 α, β 中有 $0, +\infty$ 时, 则需要仿照 7, 8 的方法进行求解.

作业 ex1.3:4,9(1)(2),10(1)(2)(4),11(1)(2).